L'intelligibilité intrinsèque des mathématiques

par
Pierre Boutroux

Article publié dans la *Revue de métaphysique et de Morale*,
1903

[573] La brillante rénovation de la philosophie des Mathématiques, dont nous admirons depuis quelques années le rapide essor, a été principalement inspirée par des tendances logiques et scientifiques. Certes, on ne peut prétendre ramener à un type unique les doctrines si riches et si variées qui ont été exposées dans cette revue et ailleurs. Cependant, de fréquentes communications échangées entre philosophes, les exigences des discussions et des polémiques devenues de plus en plus nombreuses, nos habitudes d'esprit modernes, tout a contribué à faire peu à peu prévaloir chez les penseurs contemporains l'emploi d'une méthode constante. Or cette méthode semble avoir été empruntée, sans grandes modifications, aux Mathématiques[1] proprement dites. C'est l'analyse régressive et épuratoire, celle qui a permis aux mathématiciens du siècle dernier d'assurer la parfaite rigueur de leurs démonstrations, en rejetant dans les définitions et les postulats toutes les notions, métaphysiques ou vagues, dont le principe de contradiction ne pouvait avoir raison. Comme il était naturel, une fois ce premier travail achevé, on soumet maintenant les définitions à une analyse semblable. On commence par réduire le plus possible leur nombre et leur contenu, en s'efforçant de déterminer le résidu de données indispensables à qui veut construire le système des mathématiques. Puis, analysant à leur tour ces données, on cherche à discerner leurs éléments, et l'on se demande si l'esprit les emprunte au monde sensible, ou s'il les tire au contraire de lui-même. Ainsi la philosophie scientifique contemporaine [574] procède tout naturellement du grand mouvement logique que l'on a vu se manifester, depuis une cinquantaine d'années déjà, dans le domaine des Mathématiques pures.

Pourvue dès lors d'une méthode rigoureuse, la logique des sciences a pu résoudre, d'une manière probablement définitive, certaines questions qui avaient été longtemps débattues. Ainsi, tout le monde est d'accord aujourd'hui pour affirmer que, si l'on peut resserrer indéfiniment les limites de l'indémontrable, il faut cependant renoncer à le réduire à néant : prétendre tirer toutes les Mathématiques du principe de contradiction serait illusoire. Mais, d'autre part, on rejette, avec une quasi-unanimité les anciennes théories empiristes. Les notions mathématiques ne sont pas empruntées au monde physique, où elles ne sont jamais qu'imparfaitement réalisées, et elles ne sont pas non plus un produit de l'abstraction, car elles sont exemptes de tous les caractères sensibles dont est formée notre perception des objets réels. Considérée par rapport au monde sensible, la science mathématique n'est pas objective et aucune expérience physique ne pourra jamais démontrer la vérité ou la fausseté de ses postulats. - Sur ces divers points, nous avons acquis maintenant une certitude dont on ne saurait méconnaître l'importance. Ainsi, nous ne devrons, plus désormais en douter, le savant qui passe sa vie à épurer et à rectifier les définitions premières des mathématiques a, sans doute, une merveilleuse occasion d'exercer ses facultés de logicien, mais son travail ne peut servir à rendre plus solides les bases de la science. Et nous savons, d'autre part, qu'aucun

[1] Il ne s'agit pas, bien entendu, de la méthode d'invention à laquelle la suite de cette étude sera consacrée. Je fais allusion, pour le moment, à cette partie très spéciale de la science mathématique où, au lieu de chercher du nouveau, l'on s'efforce de remonter des conséquences aux principes.

postulat n'est imposé au mathématicien par la réalité sensible, et que les conventions les plus arbitraires sont toutes également légitimes, pourvu qu'elles soient commodes dans la pratique.

Si, toutefois, l'on considère en elle-même la thèse philosophique à l'appui de laquelle les contemporains ont apporté de si solides arguments, il faudra bien avouer qu'elle n'est pas extrêmement neuve. Les notions mathématiques ne sont ni empiriques, ni analytiques au sens scolastique : cette thèse est précisément celle que Descartes a donnée comme point de départ à ses spéculations ; elle n'est pas moins évidente aux yeux de Kant. Seulement, ces philosophes voyaient en elle, non pas, la solution d'une difficulté, mais, bien au contraire, l'origine d'un grave problème métaphysique. Si le fondement des Mathématiques ne se trouve ni en elles-mêmes, ni dans le monde sensible, en quoi peut consister ce fondement ? Quelle part [575] revient à l'esprit dans la formation de la science mathématique ? Peut-on y discerner un objet, qu'on ne cherchera pas, bien entendu, à rapprocher des objets physiques, mais qui s'opposera, du moins, à l'esprit sujet ? Tels sont les problèmes que se posaient Descartes et les métaphysiciens qui lui ont succédé. Or il est permis de se demander si la nouvelle philosophie des sciences a fait très sensiblement avancer la solution de ces obscures questions.

L'analyse, qui a été son principal instrument, permettait d'isoler les notions mathématiques et de les dépouiller de toute qualité sensible. En éliminant les éléments étrangers qui s'y mêlaient, elle a montré admirablement ce que ces notions n'étaient pas. Mais est-elle capable de nous renseigner sur leur nature et sur leur genèse ? Cela n'est nullement évident. Certains logiciens nous déclareront sans doute qu'ils nous apportent bel et bien une doctrine positive, laquelle est fort séduisante : ils nous diront que la science mathématique est un édifice librement construit par l'esprit humain. Mais qu'entendent-ils au juste par là ? Mettent-ils quelque idée précise sous cette conception du pouvoir créateur de l'esprit ? Il semble bien, lorsqu'on l'examine d'un peu près, que leur doctrine soit faite principalement de négation et que sa signification exacte se réduise en somme à cette double proposition : les notions mathématiques ne peuvent être tirées ni de l'expérience, ni du principe de contradiction. En s'efforçant de devenir une science rigoureuse, la logique mathématique s'est peut-être condamnée à rester stérile dans le domaine de la métaphysique.

N'est-ce point là d'ailleurs ce qu'elle-même se propose ? Ne nous y trompons pas : ici comme ailleurs, l'abandon des problèmes métaphysiques n'est pas un effet du hasard. Il est tout au contraire, dira-t-on, le principal mérite de la logique contemporaine, le plus grand bienfait dû à la collaboration des savants aux recherches des philosophes.

Si l'on adopte cette opinion, on devrait, en premier lieu, déclarer nettement que l'on étudie des questions différant radicalement de celles qui ont préoccupé les anciens penseurs. Or il semble que l'on soit parfois tenté d'attribuer aux philosophes classiques le point de vue, logique et formel qui a prévalu depuis eux. Considérant, par exemple, Descartes comme le type du pur analyste, on répétera indéfiniment qu'il ramenait toutes les Mathématiques à une série [576] de déductions dialectiques - quoiqu'il ait pris soin, lui-même, de prévenir expressément cette erreur. On. ajoutera que la réforme kantienne a consisté à ruiner la doctrine analyste des cartésiens, en y substituant celle du jugement synthétique. C'est oublier que le débat entre Descartes et Kant n'est pas d'ordre logique. Le point de départ logique est en effet très sensiblement le même chez ces philosophes : substitution de l'égalité mathématique ou relation à la proposition aristotélicienne qui unit un attribut à un sujet. C'est seulement lorsqu'il s'agit de donner à la science un fondement métaphysique que les deux systèmes se séparent. Une logique véritablement indépendante ne peut donner raison ni à l'un ni à l'autre.

Mais est-il vrai que la logique ait déjà réussi, en fait, à s'affranchir complètement ? Nous avons beau affirmer et nous convaincre que les hypothèses métaphysiques sont purement gratuites, notre esprit est ainsi fait qu'il ne peut, cependant, les abandonner ; peut-être, d'ailleurs, lui sont-elles indispensables pour qu'il puisse orienter ses recherches, et fixer les formes fuyantes du raisonnement abstrait. Dire, par exemple, que les Mathématiques résultent d'une construction opérée par l'entendement, c'est poser une thèse métaphysique. Sans doute, on pourra soutenir qu'il n'y a dans cette affirmation qu'une convention de langage. Mais il s'agit alors, remarquons le bien, d'une convention extra-scientifique ; aussi ne suffit-il pas, pour la justifier, d'invoquer des raisons de commodité pratique. En la choisissant de préférence à une autre, le logicien, qu'il le veuille ou non, incite ses lecteurs à adopter certaines vues métaphysiques, dont ils n'hésiteront peut-être pas à tirer des règles d'action. N'est-ce pas ce qui arrive tous les jours aussi bien aux savants qu'aux philosophes ?

S'habituant, par exemple, à considérer leur science comme une création libre et arbitraire[2] de leur esprit, nombre de mathématiciens apprécieront presque exclusivement en elle le choix et la rigueur des méthodes employées, la conduite des discussions, les ruses et les habiletés dialectiques, qui constituent, pour ainsi dire, les qualités esthétiques de la-déduction mathématique. Mais l'objet même de leurs recherches leur semblera à peu près indifférent, car il ne vaut à leurs yeux que par les définitions et démonstrations [577] auxquelles il emprunte tout ce qu'il a de réalité. Peu leur importera que l'on étudie tel ou tel problème qui serait regardé par d'autres comme artificiel et vain ; ils ne s'intéressent qu'à la manière, plus ou moins élégante, de résoudre les difficultés proposées. Cette sorte de dilettantisme est assez répandue, et l'on aperçoit le lien qui le rattache à la doctrine métaphysique que je signalais plus haut.

L'influence de cette doctrine sur la philosophie proprement dite n'est pas moins manifeste. S'il est admis que la méthode des mathématiques, loin de nous être imposée par l'objet de cette science, n'est au contraire que le libre exercice de nos facultés logiques, il faut en conclure que rien ne saurait nous empêcher d'isoler cette méthode de ses applications, afin de la faire servir à de nouveaux ordres de recherches. Ainsi nous aurons une psychologie, une morale, une sociologie mathématiques. La seule difficulté consistera à déterminer le choix de conventions et d'hypothèses qui permettra à la tentative de « réussir » ; peut-être faudra-t-il chercher longtemps pour trouver ces conventions : du moins n'y a-t-il aucune raison, *a priori*, pour que l'on n'y parvienne pas un jour.

[2] Il n'est question ici, comme dans la suite, que des mathématiques pures considérées en dehors de leurs applications.

N'est-ce pas encore cette même croyance à la possibilité d'une science sans objet que nous retrouvons au fond de certaines théories pédagogiques, aujourd'hui fort en vogue ? Si la science pure, celle qui n'est pas encore mêlée d'éléments étrangers, n'est qu'une forme absolument indépendante du contenu qu'elle est appelée à recevoir, il s'ensuit qu'il est parfaitement inutile de donner à l'enfant des connaissances : amasser des faits est une tâche inintelligente dont la vie saura fort bien s'acquitter. Ce qui importe, ce qui constitue la véritable mission du maître, c'est de développer chez l'élève le sens de la méthode, c'est de faire l'éducation des facultés qui préexistent dans son entendement.

Toutes ces conclusions sembleront naturelles si l'on croit à l'existence d'une science purement formelle, n'ayant d'autre fondement que la toute-puissance créatrice de l'esprit humain. Or il est indéniable que les logiciens ont fortement contribué à exalter cette puissance. Et plus ils prétendaient s'abstenir de théories métaphysiques, plus ils devenaient absolus dans leur négation de tout principe qui pût entraver ou modérer la libre action de l'entendement. Kant admettait, du moins, que cette action est régie par certaines lois *a priori* que nous impose notre raison. Mais les logiciens d'aujourd'hui croient n'avoir que faire de ces lois ; un seul principe [578] est pour eux respectable, le principe de contradiction, principe qui est, à lui seul, incapable de rien produire. C'est pourquoi ils se croient autorisés à professer que les Mathématiques sont construites de toutes pièces par notre entendement.

Mais, précisément, il n'est pas démontré que l'entendement puisse exercer ses facultés constructrices s'il ne part pas de certaines données objectives qui lui sont extérieures. (Un seul point est définitivement établi : c'est que ces données ne peuvent pas être des données sensibles.) Descartes a le premier reconnu nettement que le raisonnement mathématique est un raisonnement synthétique : cependant il n'estimait pas que l'unique ou même le principal travail du savant consistât à effectuer des synthèses. Il pensait au contraire que la synthèse se fait d'elle-même et sans effort de notre part si nous avons su acquérir une vue claire et distincte des éléments que nous nous proposons de grouper. L'œuvre originale du mathématicien consiste essentiellement, selon lui, dans la sélection et l'analyse qui permettent d'extraire les notions mathématiques du monde infini des idées. Et, loin que ces notions soient l'œuvre de notre entendement, celui-ci ne réussit pas à leur imposer son moule. Il doit se faire violence et adapter sa méthode à l'objet étudié. Ainsi, les Mathématiques sont une création de notre esprit, sans doute, mais une création qui n'est ni libre, ni arbitraire.

La doctrine cartésienne a peu de défenseurs aujourd'hui. L'existence suprasensible qu'elle confère au monde des idées est regardée comme une hypothèse aussi obscure que gratuite. Et il n'y a pas lieu de s'en étonner, puisque, précisément, l'on prétend se passer de métaphysique. Mais au moins ne faudrait-il pas admettre implicitement des croyances opposées, que l'on n'a pas même discutées. Tant que les doctrines métaphysiques seront susceptibles d'influer sur les actes et les opinions des hommes, il conviendra de n'en jamais adopter aucune sans le faire en toute connaissance de cause, et sans chercher, au moins, à justifier son choix par quelques bonnes raisons. Or il semble que les logiciens d'aujourd'hui reviennent, plus ou moins à leur insu, à une conception des Mathématiques qui rappelle beaucoup celle de Locke. On reconnaît les expressions qui leur sont familières dans ce passage où Locke nous rend compte de la formation des *Modes mixtes*[3]. « L'Esprit agit souvent par lui-même, [579] en faisant différentes combinaisons ; car ayant une fois reçu des Idées simples, il peut les joindre et combiner en diverses manières, et faire par là différentes Idées complexes, sans considérer si elles existent ainsi réunies dans la Nature. Et de là vient, à mon avis, qu'on donne à ces sortes d'Idées le nom de *Notions* ; comme si leur origine et leur continuelle existence étaient plutôt fondées sur les pensées des hommes que sur la nature même des choses, et qu'il suffit, pour former ces Idées-là, que l'esprit joignît ensemble leurs différentes parties, et qu'elles subsistassent ainsi réunies dans l'Entendement, sans examiner si elles avaient, hors de là, aucune existence réelle. » Le rapprochement pourrait être poussé plus loin. Mais il me suffit de constater que la doctrine qui réduit toutes les Mathématiques à une construction possède un nom et une histoire. Cela étant, a-t-on de sérieux motifs pour préférer la métaphysique de Locke à celle de Descartes ou à celle de Kant ? C'est une question qu'il est tout au moins permis de se poser.

*
* *

C'est dans la création de l'analyse mathématique que s'est principalement manifestée la puissance constructrice de l'esprit humain. Sans doute il est et il sera toujours évident qu'on ne peut pas construire sans matériaux. Mais, si nous distinguons encore une matière dans l'Analyse moderne, du moins faut-il reconnaître qu'elle ne mérite plus guère ce nom, tant elle s'est peu à peu dépouillée de toutes ses qualités objectives. Beaucoup de savants regardent aujourd'hui l'analyse comme un prolongement de l'arithmétique, et ils estiment que la seule idée de nombre leur suffit à construire tout le système des mathématiques pures.

Je ne veux point ici disputer, après tant d'autres, sur la genèse de la notion de nombre, ni rechercher s'il est légitime de considérer cette notion comme le résultat d'une synthèse par addition. Je ne me demanderai pas davantage s'il est bien vrai que l'analyse mathématique n'a pas d'autre objet que le nombre, et si son objet essentiel n'est pas plutôt la grandeur continue, comme l'a soutenu M. Couturat. On sait combien il est difficile de donner à ces difficiles problèmes une solution satisfaisante. Aussi éviterai-je soigneusement de les poser dans cette étude ; mais, considérant la science dans ses parties les plus achevées, je porterai la discussion sur un autre [580] terrain. Au lieu de définir la nature et l'origine des éléments dont sont formées les synthèses mathématiques, je regarderai ces éléments comme acquis, et je me demanderai par quel travail de l'esprit les synthèses sont effectuées. Sont-elles l'expression d'un groupement libre et fortuit, sinon arbitraire ? Ou, au contraire, les combinaisons mathématiques ne présentent-elles pas en elles-mêmes une certaine cohésion, certaines propriétés qui semblent indépendantes de notre volonté, et qui leur donnent l'aspect d'un fait, plutôt que celui d'une construction ? - S'il n'est pas possible d'apporter à cette question d'ordre métaphysique une réponse rigoureusement certaine, du moins convient-il d'adopter celle qui nous est suggérée par un examen attentif des méthodes mathématiques.

---

[3] *Essai philosophique concernant l'entendement humain* (Trad. Coste), liv. II, chap. XXII.

Voyons à l'œuvre le mathématicien. De plus en plus, il réduit toute l'analyse à une série de combinaisons et de transformations algébriques. Ayant en sa possession des notions aussi maniables, qu'il est possible, il les joint et disjoint à sa guise. Démontrer un théorème, c'est constater une égalité, c'est-à-dire remarquer que deux expressions analytiques résultent du groupement des mêmes éléments. Ainsi le mathématicien est bien l'ouvrier ; mais a-t-on le droit d'en conclure qu'il est aussi l'architecte ?

Personne, bien entendu, n'oserait soutenir que la construction, mathématique est absolument arbitraire. Le savant, dira-t-on, ne marche pas sans guide, car il est conduit par le désir d'aboutir à des résultats pratiquement utilisables ; en mathématiques comme en physique, c'est le succès qui justifie la recherche et la détermine à la façon d'une cause finale. Cette détermination, cependant, est-elle suffisante, et croit-on qu'il suffise d'imposer à l'esprit constructeur l'obligation de réussir, pour qu'il puisse ensuite se diriger par ses propres moyens ?

Qu'est-ce d'abord que le succès ? car il est clair que si nous restons clans le domaine de l'analyse pure, le succès ne peut plus, se manifester, comme en physique, par une plus où moins grande conformité de la théorie avec les données de l'expérience. Il n'existe en analyse aucun caractère absolu auquel on puisse reconnaître l'intérêt et la valeur d'un résultat. Si nous voulons définir cette valeur, nous sommes réduits à dire qu'elle réside dans la réunion aussi parfaite que possible de deux qualités souvent contradictoires : la généralité et la simplicité. - Soit, par exemple, une famille de fonctions analytiques suffisamment étendue : elle est définie par [581] une propriété commune aux fonctions de cette famille, c'est-à-dire par une relation entre la variable indépendante *x* et l'une quelconque des valeurs *y* que prend la fonction en *x*. Le mathématicien se propose de découvrir les diverses propriétés simples qui appartiennent aux fonctions considérées ; il veut, en d'autres termes, déduire de la relation donnée des relations nouvelles exprimant des faits géométriques ou analytiques simples. Cela étant, nous sommes naturellement amenés à nous poser la question suivante : comment, dans la pratique, le savant détermine-t-il la marche à suivre ? parmi une infinité de combinaisons également possibles, comment parvient-il à discerner celles qui seront avantageuses ?

Ce n'est, point là, comme on pourrait croire, une question accessoire. Il est en effet permis de se demander si ce n'est pas dans ce choix entre une infinité de possibles que consiste la véritable découverte mathématique. Lorsqu'une fois l'on a posé les principes du calcul algébrique, les synthèses sont affaire de patience et n'exigent plus d'invention. Le plus souvent, les problèmes que l'on se pose en analyse sont déjà virtuellement résolus : on sait d'avance que dans chaque cas particulier un calcul, parfois pénible, mais où il n'y a rien d'imprévu, fournirait la solution cherchée. Aussi n'est-ce pas cette solution qui nous est présentée comme une découverte. L'œuvre propre du mathématicien a un caractère tout différent. Sans se donner la peine d'effectuer lui-même les calculs, le mathématicien nous prédit que dans telle ou telle circonstance ils comporteraient telle ou telle simplification ; sa méthode consiste à prévoir *a priori* que certaine expression analytique possède telle propriété : entendons comme plus haut, que telle combinaison des données qui définissent cette expression conduirait à un résultat simple. Or c'est là - n'est-il pas vrai ? - le résultat d'un travail d'analyse et de choix, non de construction.

Un exemple précis nous fera peut-être mieux comprendre ce qu'il en est : je l'emprunterai à la théorie générale des fonctions, où l'invention mathématique se manifeste dans toute sa pureté.

Si nous regardons provisoirement comme acquise la notion même de fonction, - je signalerai tout à l'heure les difficultés que soulève le problème de son origine, - la théorie dont cette notion est la base nous apparaîtra comme un type remarquable de théorie synthétique. En associant d'une manière convenable, l'addition à la [582] multiplication, nous réussissons à construire des relations de plus en plus compliquées liant une variable dépendante y à une variable indépendante x. - Soit, en effet, y une fonction analytique[4] de x ; si, pour $x = x_0$, y prend la valeur y_0, on sait que, lorsque x aura une valeur voisine de x_0, y sera la somme d'une série convergente

$$(S) = x_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = y,$$

les quantités a_1, a_2... (en nombre infini) étant des constantes. Supposons que la fonction y se présente comme inconnue dans un problème de géométrie ou de mécanique et satisfasse par exemple à une équation différentielle donnée : nous saurons alors former, l'un après l'autre, les nombres y_0, a_1, a_2..., et, d'autre part, nous pourrons calculer le nombre des termes de la série (S) qu'il conviendra de conserver pour obtenir une valeur approchée de y (la somme des termes suivants étant négligeable).

Ce résultat est déjà remarquable, et cependant nous ne sommes pas encore au bout de notre synthèse. La sommation de la série (S) ne permet, en général, de calculer y que si x a une valeur suffisamment voisine de x_0 ; lorsque la différence $x - x_0$ devient trop grande, la série (S) cesse de converger, c'est-à-dire qu'il n'est plus possible d'évaluer sa somme à l'aide d'un nombre fini d'opérations.

Soit alors x_1, une valeur de x pour laquelle la série (S) soit convergente. Lorsque x est voisin de x_1 nous pouvons représenter y par une série convergente de la forme

$$(S_1) = y_1 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)^2 + \dots = y,$$

et il suffit de connaître les nombres y_0, a_1, a_2, pour calculer les nouveaux nombres y_1, b_1, b_2,… Le plus souvent cette nouvelle série (S_1) nous permettra de calculer la valeur de la fonction y pour de nouvelles valeurs de x ; et ainsi, de proche en proche, - en construisant une suite de séries convergentes, dont chacune se déduit de la précédente, - nous déterminerons la valeur de y correspondant à une valeur *quelconque* de x.

La méthode que je viens d'esquisser grossièrement s'appelle méthode du *prolongement analytique*., Si l'on se représente une fonction [583] sous la forme d'une courbe, on pourra énoncer comme il suit le résultat auquel elle conduit : *Si l'on se donne un arc quelconque de la courbe*, *d'ailleurs arbitrairement petit*, *on saura*, *à l'aide d'une suite convenable d'opérations*, *construire la courbe tout entière.*

---

[4] Définir y comme fonction de x, c'est faire correspondre à une valeur quelconque de x une ou plusieurs valeurs de y. Simplifiant un peu les choses, je ne considérerai que l'une de ces valeurs de y, ce qui revient, - pour employer un langage géométrique, - à étudier une branche seulement de la fonction y.

Un tel résultat devrait, semble-t-il, suffire à tous nos besoins. Lorsque nous rencontrons dans un problème une fonction nouvelle, notre curiosité à son égard sera, - n'est-il pas vrai ? - entièrement satisfaite, si nous apprenons à calculer sa valeur pour une valeur quelconque de la variable. Construire explicitement une courbe, c'est en faire apparaître en même temps toutes les propriétés. - Mais, ne l'oublions pas, si la construction est possible, ce n'est qu'au prix de calculs d'une inextricable complexité, qui ne peuvent trouver place dans une théorie générale. Ils regardent le praticien non le mathématicien. Celui-ci emploiera au contraire tous ses efforts à éviter la synthèse, cherchant à prévoir à l'avance les résultats auxquels elle conduirait le calculateur patient qui ne se serait pas laissé rebuter.

Examinons d'ailleurs d'un peu plus près la théorie du prolongement analytique. Il est exact qu'elle nous fournit un moyen d'étudier une fonction analytique quelconque[5] ; mais elle ne nous fournit ce moyen, si l'on peut dire, qu'en puissance. Elle ne nous donnera, en général, d'une fonction y (x), qu'une connaissance fragmentaire ; car, pour représenter complètement y, il faudrait former une infinité de séries convergentes. C'est pourquoi un mathématicien, ne considérera pas comme connue la fonction y (x), si son savoir se borne à un moyen de calculer de proche en proche les coefficients de la série (S). Son esprit ne sera satisfait que s'il connaît des propriétés de cette fonction qui soient complètes en elles-mêmes et qu'on puisse embrasser d'un seul coup d'œil. Savoir, par exemple, que la fonction y ne prend jamais plusieurs valeurs distinctes pour une même valeur de x ; ou qu'elle reste finie pour toute valeur (finie) de x ; ou qu'elle se reproduit périodiquement, lorsque x parcourt une certaine série d'intervalles ; ou qu'elle est constamment liée par une relation simple avec d'autres fonctions connues : voilà ce qui intéresse le mathématicien, voilà ce qu'il attend comme résultat de ses [584] recherches auxquelles la théorie du développement en série n'a servi que d'introduction.

Considérée sous cet aspect, qui est le vrai, la théorie des fonctions perdra en grande partie son apparence synthétique. Sans doute, si l'on y tient absolument, on pourra toujours donner aux découvertes nouvelles la forme d'une construction synthétique : ainsi, l'on construira *a priori* une théorie des fonctions uniformes, une théorie des fonctions périodiques. Mais c'est le plus souvent après coup que les choses sont ainsi présentées, et le problème fondamental est toujours le suivant : étant donnée une fonction inconnue (satisfaisant, par exemple, à une équation différentielle donnée), reconnaître que cette fonction possède tel ou tel caractère. Or ce problème est nettement analytique. Et, ici encore, nous voyons apparaître le rôle essentiel que joue le choix dans la découverte mathématique. Lorsque nous nous trouvons en présence d'une fonction, nous sommes libres de porter notre attention sur l'un ou sur l'autre de ses éléments : grandeur, nombre de branches, périodes, etc. Il s'agit donc de choisir entre ces éléments, et de déterminer ceux qui jouissent de propriétés particulières, ceux qui pourront servir à spécifier les fonctions que l'on étudie (le mathématicien cherche, si l'on peut dire, les caractères distinctifs des diverses familles de fonctions), ceux enfin qui seront, dans nos calculs, des instruments maniables.

[5] Il y a naturellement des exceptions; mais on ne les considère aujourd'hui encore que comme de simples curiosités, et il m'est permis de les passer sous silence.

Nous voyons ainsi clairement, sur un exemple, en quoi consiste le travail du mathématicien. Il s'est servi du développement en série pour conférer une sorte d'existence à cet être mystérieux qu'est une fonction mathématique. Après quoi, il peut se consacrer à sa tâche fondamentale, c'est-à-dire à l'analyse de cet être. Ses procédés d'investigation ne sont plus alors ceux d'un créateur, ce sont ceux d'un expérimentateur. Tout se passe comme s'il existait, à côté du monde sensible, un monde imaginaire où les notions mathématiques seraient parfaitement réalisées. Et, comme le physicien observe le monde sensible pour en décrire les lois, de même l'algébriste analyse le monde mathématique et en fixe les propriétés au moyen de symboles, toujours inadéquats, mais de plus en plus perfectionnés. La science appliquée est une reconstruction de l'univers réel ; les mathématiques pures sont, en quelque façon, la reconstruction d'un monde idéal. C'est du moins ce que disait Descartes ; et, quelque lointaine que puisse nous sembler aujourd'hui sa philosophie, on ne [585] saurait nier qu'elle ne nous donne une idée assez juste de ce qu'est en fait la recherche mathématique.

*
* *

Y a-t-il là, cependant, autre chose qu'une apparence, et est-ce bien avec raison que nous attachons une si grande importance au caractère analytique des mathématiques ? - Il se peut, nous dira-t-on, que l'analyse soit l'instrument de découverte le plus fécond, celui qui exige le plus d'invention ; elle n'est cependant pas fondamentale ; car, si l'on analyse, c'est que l'on a quelque chose à analyser, et ce quelque chose est le produit d'une synthèse. Sans développement en série, par exemple, il n'y a pas de définition précise des fonctions analytiques, partant point de recherche de leurs propriétés. Le monde mathématique, le monde suprasensible de Descartes n'existe qu'en vertu d'une synthèse initiale qui l'a créé. « Un fait mathématique, a écrit M. Le Roy[6], est une résultante inévitable des postulats antérieurement admis dans le discours ; il revêt une apparence d'extériorité quand les postulats qui le déterminent ne sont pas explicitement dégagés. Ce qu'il y a au fond d'un fait mathématique, c'est l'activité régulière de l'esprit… »

Il faut reconnaître que notre conception actuelle de la science donne à la doctrine de M. Le Roy une forte apparence de vérité. Ainsi que je le disais en commençant, rien n'est imposé du dehors au mathématicien. Sa science est un édifice bâti de toutes pièces ; et, au rebours de ce que pensait la philosophie classique, il convient peut-être de regarder la synthèse comme précédant l'analyse. Mais de là à conclure que la synthèse soit l'essence même du fait mathématique, il y a un pas que rien ne nous oblige à franchir.

Le géomètre ne peut se passer de ses figures, soit qu'il les trace sur le papier, soit que son imagination les lui représente ; l'image est en effet nécessaire pour fixer et même pour provoquer la conception, et sans elle il n'y a pas de géométrie possible. Dirons-nous cependant que les corps géométriques sont faits d'images sensibles ? C'est là une opinion dont on a fait justice. Or ce qui est vrai des figures géométriques peut être vrai

[6] Le Roy, Science et philosophie, *Revue de métaphysique et de morale*, janvier 1900.

aussi des symboles algébriques. Ils sont indispensables, sans doute, parce que sans eux nous n'aurions [586] point de prise sur les réalités mathématiques : mais ces réalités sont autre chose que la juxtaposition de nos symboles.

On ne peut expliquer que de cette manière le caractère imparfait de la science humaine. Nous construisons, il est vrai, avec les seuls symboles de l'algèbre, tout le système des mathématiques ; et ce n'est pas peu. Mais pourquoi faut-il que la voie suivie ait toujours l'air si détournée et si imprévue ? Pourquoi sommes-nous obligés de donner des choses les plus simples des définitions de plus en plus compliquées et insaisissables ? Pour parvenir à la notion de fonction analytique, - notion qu'un esprit non prévenu croirait pouvoir embrasser en une seule intuition, - il nous a fallu parler d'une infinité de séries comprenant chacune une infinité de termes. Et nous voilà ainsi réduits, pour rester rigoureux, à définir le simple par le complexe, le fini par l'infini. Cette nécessité nous révolte : eh bien alors, résignons-nous à déclarer comme Descartes que notre science n'est qu'une reconstruction artificielle, un effort pour saisir un objet qui nous échappe et qui plane au-dessus de nos symboles, sans en partager les imperfections.

Le fait mathématique est plus riche que la synthèse dont il est l'expression ; car il contient en puissance une infinité de synthèses nouvelles, une infinité de propositions que l'on en peut dégager et que l'on n'y avait point mises.

Considérons par exemple une courbe. Le géomètre choisit pour la définir l'une quelconque de ses propriétés, dont il déduit ensuite toutes les autres. Mais, c'est là une méthode d'exposition dont la valeur est toute relative ; rien ne nous empêche, en effet, de retourner le travail du géomètre en faisant de ses corollaires des définitions, et réciproquement. En réalité, chacune des propriétés de la courbe est grosse de toutes les autres et ne peut être isolée qu'artificiellement. Ces propriétés ne sont qu'un seul et même fait mathématique, qui les renferme toutes, qui consiste précisément dans leur réunion, et dont chacune n'est qu'une traduction fragmentaire.

Soit encore cet énoncé : les intégrales d'une équation différentielle du premier ordre constituent une famille de courbes dépendant d'un paramètre variable. Il faut entendre par là que si l'on choisit un système de coordonnées quelconques x et y et un paramètre α variant suivant une loi arbitraire, l'équation générale des courbes considérées sera de la forme $F(x, y, \alpha) = 0$. Et l'on voit que cet [587] énoncé n'est pas une proposition synthétique, mais bien un ensemble infini de propositions synthétiques, ce qui est tout différent.

La synthèse est le commencement de la science, mais celle-ci ne tarde pas à la dépasser. Il ne suffit pas, en effet, qu'une théorie soit logiquement construite et d'une élégante simplicité ; il faut avant tout qu'elle ait la plus grande généralité possible. Il faut obtenir des propositions qui ne s'appliquent pas seulement *toti definito*, mais encore *soli definito*. Or c'est ici que le mathématicien abandonne nettement le point de vue synthétique. Sans doute il ne me dénie pas le droit de construire à ma guise une théorie des fonctions, en partant de définitions exemptes de contradiction. Mais il me demande ensuite de lui prouver que les propriétés auxquelles j'aboutis n'appartiennent pas à une classe de fonctions plus générales[7] ; car, s'il en était ainsi, mes définitions seraient mauvaises, puisqu'elles seraient trop étroites sans utilité. Jamais une théorie synthétique ne peut se justifier elle-même ; savons-nous en effet *a priori* si elle n'est pas un fragment tronqué et artificiel d'une théorie plus étendue qui nous échappe et qu'il conviendrait de lui substituer ? Si, comme je l'indiquais plus haut, le rôle des mathématiques consiste à déterminer ce qui est à la fois simple et général, nous ne saurions attendre d'une méthode de construction qu'elle nous conduise droit au but ; il nous faut faire une découverte au sens propre du mot, c'est-à-dire une sélection qui est nécessairement analytique.

Nous conclurons donc que notre science mathématique est une reconstruction plutôt qu'une construction. Elle est synthétique, du moins dans ses débuts, parce qu'autrement elle ne serait pas pour nous. Mais on ne saurait y voir une œuvre de notre esprit ; car, chose curieuse, il semble que ce soit précisément parce qu'elle est synthétique, et en tant qu'elle est synthétique, que la science mathématique est en même temps si imparfaite, si étrangement compliquée, si artificielle. Bref la synthèse ne fait que préparer l'analyse qui est l'œuvre essentielle du mathématicien.

*
* *

Je vais maintenant aller plus loin encore en examinant à son tour d'un peu plus près cette synthèse initiale, qu'on est bien obligé de [588] placer à la base de la science, alors même qu'on en conteste le pouvoir créateur. Cette synthèse, grâce à laquelle nous traduisons, en langage humain les vérités mathématiques, croit-on que nous l'édifiions par nos propres moyens ? Est-il vrai que toutes les définitions de l'Analyse se réduisent à des combinaisons des premières définitions algébriques ?

Si les conclusions précédentes sont exactes, si notre science mathématique, loin d'être arbitraire, nous est bien en quelque façon imposée du dehors, si elle a pour but véritable la découverte de lois générales vers lesquelles convergent nos synthèses, il est clair que la considération de l'objet poursuivi devra dès le début déterminer et diriger nos recherches. A l'origine des synthèses, nous trouvons la conception de loi mathématique, l'idée qu'une construction, parfois infinie, pourra conduire à des résultats simples et intuitifs. (Il n'est nullement évident *a priori* qu'il en doive être ainsi.) La synthèse est donc précédée d'une hypothèse et elle repose toujours sur une induction.

Supposons cependant qu'un hasard heureux nous ait conduits du premier coup à une définition qui soit la bonne, et cherchons à analyser cette définition. Est-elle bien réellement décomposable en une série d'éléments plus simples, ainsi que le voudraient les algébristes ? L'analyse de la notion de fonction va nous fournir à ce sujet des indications précieuses.

---

[7] Ainsi les mathématiciens n'ont guère étudié jusqu'ici que les fonctions développables en série de Taylor. Pour que cette limitation de leurs travaux fût, pleinement justifiée, il faudrait démontrer, - comme l'a fait observer M. E. Borel, - que les fonctions non développables en série de Taylor ne jouissent pas de propriétés analogues.

Qu'appelle-t-on, en mathématiques, fonction d'une variable ? Si l'on prenait ce terme dans son acception la plus générale, on devrait appeler fonction toute expression d'une correspondance établie entre les points de deux droites ou de deux plans. En d'autres termes, la fonction serait définie comme étant le symbole d'une opération qui fait correspondre à un point quelconque d'une droite ou d'un plan un ou plusieurs points d'une autre droite ou d'un second plan. On serait ensuite naturellement amené à particulariser cette correspondance, en lui imposant certaines conditions supplémentaires : mais ce sont là, semble-t-il, des restrictions ajoutées après coup, dont il est permis de faire abstraction si l'on s'en tient à la conception la plus générale, à la conception primitive de fonction mathématique.

Le mathématicien moderne, cependant, logicien et synthétiste, ne [589] va-t-il pas repousser une pareille conception ? Pour qu'une définition soit bonne à ses yeux, il faut qu'elle ne fasse appel à aucune idée non encore définie. Or en est-il ainsi de l'idée de correspondance ? C'est là, remarquons-le, une notion qui est loin d'être claire et qui n'est pas aussi dépouillée qu'on pourrait croire de tout contenu métaphysique. Qu'est donc cette dépendance mystérieuse dont nous affirmons l'existence sans pouvoir lui donner aucune forme précise ? (Essayer de la représenter, ce serait forcément la particulariser et perdre de vue l'idée générale de fonction.) Quelle est cette étrange sympathie entre nombres qui fait que si l'un est donné, l'autre se trouve *nécessairement* donné en même temps ? Plus nous analyserons la notion de correspondance, plus elle nous apparaîtra comme irréductible, plus la synthèse nous semblera impuissante à la construire.

Mais son intervention est-elle vraiment nécessaire ? Peut-être ai-je commis tout à l'heure une confusion entre l'idée métaphysique de la fonction et sa définition mathématique. Les mathématiciens, ces rusés escamoteurs, n'auraient-il donc pas réussi à trouver quelque artifice qui leur permit d'éluder l'obscure notion de correspondance ? n'est-ce pas précisément ce qu'ont fait certains savants modernes, particulièrement épris de rigueur, lorsqu'ils se sont efforcés de construire toute l'Analyse avec la théorie du développement en série, cet instrument par excellence de la synthèse mathématique ? Plus rien alors de vague ou de mystérieux. On définit ce qu'il faut entendre par une série convergente développée suivant les puissances d'une variable x,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots ;$$

la somme de cette série est une *fonction* de x.

N'insistons pas sur ce que cette définition peut avoir de trop particulier, et considérons-la en elle-même. Elle signifie, que si l'on effectue sur la variable x certaines opérations déterminées, on obtiendra un nouveau nombre (ou point) y qui sera dit *fonction* de x. Cette fois encore, comme dans la définition générale donnée plus haut, il est question de correspondance, mais c'est une correspondance d'une tout autre nature ; ce n'est plus une dépendance abstraite et mystérieuse, c'est une relation bien déterminée, résultat d'une série d'opérations connues, additions et multiplications. Devons-nous, cependant, conclure de là que notre nouvelle définition [590] est purement synthétique ? On pourrait, je crois, montrer qu'il n'en est rien.

Nous savons que l'on déduit y de x au moyen d'additions et de multiplications, et il en est ainsi parce que nous l'avons voulu. Mais comment ces opérations sont-elles combinées, quelle est la loi de leur enchevêtrement, quels sont, en d'autres termes, les coefficients a_0, a_1, a_2..., cela, nous devons nous résigner à l'ignorer, puisque nous voulons une définition qui s'applique à toutes les fonctions analytiques. - Nous sommes sûrs de pouvoir, dans chaque cas particulier, effectuer une synthèse qui nous donnera la valeur de y. Mais d'où nous vient cette certitude ? Peut-on admettre qu'elle soit, elle aussi, d'origine synthétique ?

Examinons d'un peu plus près la définition de la série convergente. Ses coefficients a_0, a_1, a_2..., étant en nombre infini, ne sont jamais tous explicitement donnés. Regarder la série comme connue, c'est simplement admettre qu'on saurait, le cas échéant, calculer un nombre quelconque de ses coefficients en se servant soit des valeurs des coefficients déjà calculés, soit des données du problème que l'on résout. Mais ici reparaissent, les difficultés signalées plus haut : nous voyons en effet que définir une série, c'est en somme définir une correspondance entre un nombre entier n et un autre nombre a_n qui sera par hypothèse le coefficient de x^n dans la série considérée. Et cette nouvelle correspondance, nous ne pouvons, à moins de commettre une pétition de principe, la représenter à son tour par un développement en série ; nous ne savons absolument pas en quoi elle consiste, ni s'il est possible de la considérer comme une résultante de correspondances plus simples. Elle a un caractère franchement qualitatif.

Quelle que soit donc la définition que nous adoptions, à quelques détours que nous ayons recours, nous retrouvons toujours, comme un élément essentiel de la fonction mathématique, cette mystérieuse notion de correspondance, rebelle à la synthèse. C'est dire que notre définition de la fonction ne saurait être regardée, comme une combinaison de définitions antérieures ; en d'autres termes, qu'elle n'est pas construite, du moins avec les éléments dont nous disposons.

Ainsi, nous sommes conduits à donner plus d'extension encore à la conclusion des pages précédentes. La synthèse nous est apparue plus haut comme une forme imposée à notre science par des [591] nécessités pratiques, comme la condition de la réalisation par l'homme d'une science supérieure et objective. Si maintenant nous détachons notre attention de l'objet poursuivi pour la porter tout entière sur cette forme synthétique, nous constatons que cette forme ne peut à aucun moment être isolée de son objet. Il n'est pas possible, même après coup, même dans un travail d'exposition habilement truqué, de traduire l'Analyse mathématique en langage purement formel ; car on se heurterait alors inévitablement à des notions irréductibles, comme est celle de correspondance.

Il serait certainement intéressant de pousser un peu plus à fond l'analyse de cette notion. Ce n'est point seulement dans la définition de la fonction que l'on constaterait sa présence : d'un bout à l'autre de la science mathématique elle semble jouer un rôle fondamental, quoique souvent dissimulé. Correspondance, dépendance mutuelle et nécessaire de quantités variables, simultanéité de propriétés, n'est-ce pas là, en effet, dans toute sa généralité, le schème de la loi mathématique ?

Le mathématicien, a-t-on dit souvent, étudie des relations. Or il les étudie de deux manières fort différentes. Lorsqu'il traite un problème de science appliquée, il part de relations données et entièrement déterminées qu'il se propose de soumettre à un travail de combinaison synthétique. Dans les mathématiques pures, au contraire, il suit une marche exactement inverse, parce qu'il s'efforce alors de prévoir et d'embrasser dans ses résultats la multiplicité des cas possibles. Partant cette fois de la notion la plus générale de relation, il se propose de déterminer les diverses formes et représentations particulières qu'elle est susceptible de recevoir. Il cherche à en exprimer le contenu, et il en tire par exemple une classification des fonctions, une classification des équations différentielles. Ainsi l'on pourrait peut-être soutenir, sans paradoxe, que les mathématiques tout entières ne sont, à un certain point de vue, que l'analyse détaillée de la notion de correspondance ou de relation.

Mais il n'est sans doute pas nécessaire d'approfondir ici cette question, ni de chercher à décider sur quoi porte exactement l'analyse du mathématicien. Avant de déterminer l'objet de la science mathématique, commençons par reconnaître qu'elle en a un. Cela ne veut point dire, je le répète, que les Mathématiques soient en aucune façon solidaires du monde physique : les liens qui les y rattachaient ont depuis longtemps disparu. Si toutefois la science mathématique [592] mérite à ce point de vue le nom de science formelle, elle n'en possède pas moins, si l'on peut dire, une objectivité intrinsèque, parce qu'elle paraît absolument indépendante des procédés employés pour l'édifier, parce qu'un entendement exclusivement doué de facultés synthétiques et organisatrices serait, semble-t-il, nécessairement condamné à l'ignorer toujours.