Chapitre 4
REGIMES TRANSITOIRES

I. RAPPELS DU CHAPITRE 1

La loi des mailles et la loi des nœuds sont applicables aux expressions instantanées des courants et des tensions.

On se limite à l'étude des circuits ne comportant que des dipôles linéaires : résistances R, inductances pures L, condensateurs C et générateurs parfaits. Les équations caractéristiques de ces dipôles sont :

Résistance : $u = R \cdot i$ (IV-1)

Condensateurs : $i = C \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (IV-2)

Inductances : $u = L \cdot \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (IV-3),

Sources de tension : $u = E$ quelque soit i (IV-4)

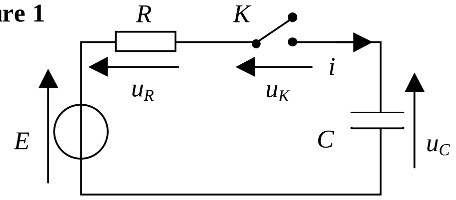
Les équations (IV-2) et (IV-3) imposent :

- En continu (régime "établi"), la dérivée de n'importe quelle grandeur étant nulle, l'inductance se comporte comme un fil ou un interrupteur fermé et le condensateur se comporte comme une coupure du circuit ou un interrupteur ouvert.
- L'intensité qui traverse une inductance ne peut subir de discontinuité (varier instantanément). De même la tension aux bornes d'un condensateur ne peut subir de discontinuité.

II. REGIMES TRANSITOIRES DU PREMIER ORDRE.

II.1. Modification de la charge d'un condensateur à travers une résistance.

Figure 1



II.1.a. Etat initial (t < 0)

L'interrupteur K ouvert impose $i = 0$, donc la tension u_C aux bornes du condensateur U_{C0} est constante (IV-2) et la tension u_R aux bornes de la résistance est nulle.

La tension u_K aux bornes de l'interrupteur vaut donc :

$$u_K = E - U_{C0} \qquad \text{(IV-5)}$$

A t = 0, on ferme l'interrupteur K (rien n'oblige à poser comme origine des temps l'instant de la fermeture de K, mais c'est plus pratique).

II.1.b. état à t = 0+

C'est l'instant qui suit la fermeture de K. L'interrupteur étant fermé, on a $u_K = 0$.

La loi des mailles impose :

$$E = u_R + u_K + u_C \qquad \text{(IV-6)}$$

La tension aux bornes du condensateur ne pouvant varier instantanément (Chap 1 § II.2), elle vaut toujours U_{C0}. On obtient alors :

$$u_{R0+} = E - U_{C0} \qquad \text{(IV-7)}$$

$$\text{d'où : } i_{0+} = \frac{E - U_{C0}}{R} \qquad \text{(IV-8)}$$

Le circuit subit une brusque discontinuité de courant qui impose un début de variation pour la tension u_C avec un coefficient directeur à l'origine qui vaut :

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{0+} = \frac{E - U_{C0}}{RC} \qquad \text{(IV-9)}$$

II.1.c. A t quelconque.

En considérant (IV-1), (IV-2) et (IV-6) on obtient :

$$E = R \cdot C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \qquad \text{(IV-10)}$$

Le produit RC, homogène à une durée est appelé constante de temps du circuit.

La solution de l'équation différentielle (IV-10) s'obtient à l'aide de la solution générale donnée en annexe (**annexe IV-1**) et en considérant que :

- $U_{C0+} = U_{C0}$
- $U_{Cf} = E$
- $\tau = RC$

On en déduit :

$$u_C = \left(U_{C0} - E\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E \qquad \text{(IV-11)}$$

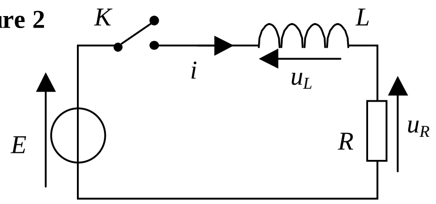
La courbe de la variation de u_c correspond à la courbe type décrite en annexe (§ IV-2).

Remarques :

- Plus le produit RC est grand plus les variations de u_C s'effectuerons lentement.
- Si le générateur de tension continue est remplacé par une source de tension périodique $e(t)$, de période T et de valeur moyenne E_{moy}, la tension qui s'établira aux bornes du condensateur sera d'autant plus proche de E_{moy} que τ sera supérieure à T.

II.2. Etablissement du courant dans un circuit inductif.

Figure 2



L'étude se mène d'une manière similaire à celle effectuée au paragraphe précédent :

- pour $t < 0$, $u_K = E$ et $u_L = u_R = i = 0$
- à t = 0+ : il ne peut pas y avoir de discontinuité pour l'intensité traversant l'inductance L : $u_R = i = 0$, de plus $u_K = 0$ donc on a : $u_L = E$ (Brusque discontinuité de la tension aux bornes de l'inductance).
- Pour $t > 0$, la loi des mailles impose :

$$u_L + u_R = E \Rightarrow \frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = \frac{E}{R} \qquad \text{(IV-12)}$$

La solution de cette équation différentielle est alors :

$$i = -\frac{E}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\frac{L}{R}} \right) + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

(IV-13)

avec $\tau = \frac{L}{R}$, constante de temps du circuit.

Remarques :

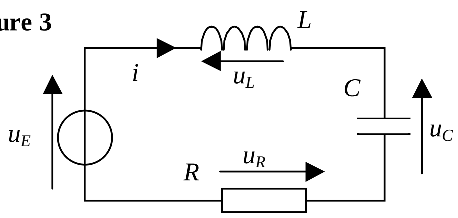
- La résistance à prendre en compte est la résistance totale de la maille : à la résistance du circuit on doit éventuellement ajouter la résistance de la bobine et la résistance interne du générateur.
- L'ouverture de l'interrupteur lorsque le courant est établi est contraire au principe qui interdit la mise en série de deux sources de courant imposant des courants d'intensités différentes (Cf. **Chapitre 1, § II-5c**). Cette ouverture produit une étincelle de rupture aux bornes de l'interrupteur.

III. Regimes transitoires du second ordre

III.1. Cas général.

Le circuit étudié est représenté à la figure 3.

Figure 3



La loi des mailles impose :

$$u_E = u_R + u_L + u_C$$

En utilisant les équations caractéristiques de ces dipôles on obtient :

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R \cdot i + u_C = u_E \qquad \text{(IV-14)}$$

en substituant (I-10) Dans (IV-11), il vient :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_E \qquad \text{(IV-15)}$$

et en dérivant IV-11 :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{E}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(IV-16)}$$

Ces grandeurs respectent une équation différentielle du second ordre d'où l'appellation "régimes transitoires du second ordre".

III.2. Solution du régime libre.

On pose $u_E = 0 = \mathrm{Cte} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_E}{\mathrm{d}t} = 0$. Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}x = 0$$

III.2.a. Notations usuelles

ω_0 : *pulsation propre* en rad/s, telle que :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

τ : *temps de relaxation* en seconde : $\tau = \frac{L}{R}$

R_c : *résistance critique* en Ohm : $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

ξ (ou σ, ou m) : *coefficient d'amortissement* sans unité : $\xi = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{R_c}$

Q, *facteur de qualité* : $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

Avec ces notations, l'équation à résoudre peut s'écrire :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$$

III.2.b. Solutions de l'équation

Le discriminant de l'équation caractéristique est égal à :

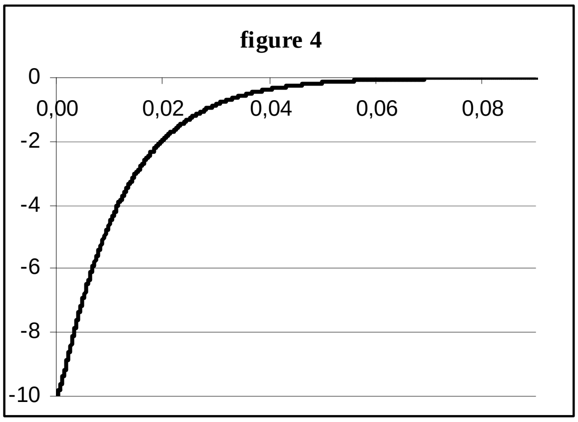
$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}$$

Il est nul lorsque la résistance de la maille est égale à la résistance critique R_c.

Les résultats de la résolution des équations différentielles développées en annexe (§ IV-2) nous obligent à différentier 3 régimes distincts selon la valeur de R, la résistance totale de la maille :

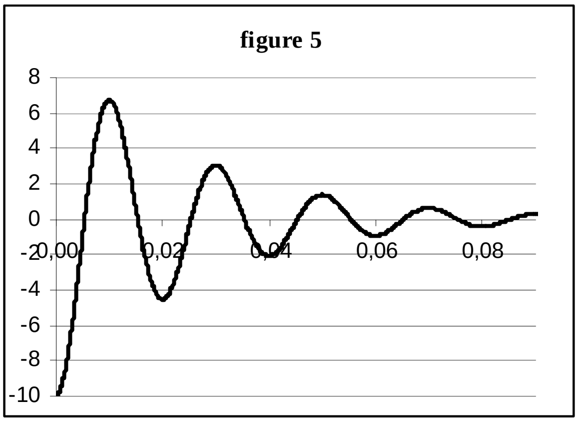
- Pour $R < R_c$ (ou $Q < 0{,}5$ ou $\xi > 1$)

Les racines sont réelles, l'allure de la tension u_C est représentée à la figure 4 (avec $Q = 0{,}25$). On constate que u_C ne subit aucune oscillation, ce régime est dit **apériodique**.



- Pour $R > R_c$ (ou $Q > 0{,}5$ ou $\xi < 1$)

Les racines sont complexes, l'allure de la tension u_C est représentée à la figure 5 avec ($Q = 4$). On constate que u_C subit des oscillations, ce régime est dit **pseudo-périodique**.



La période de ces oscillations vaut :

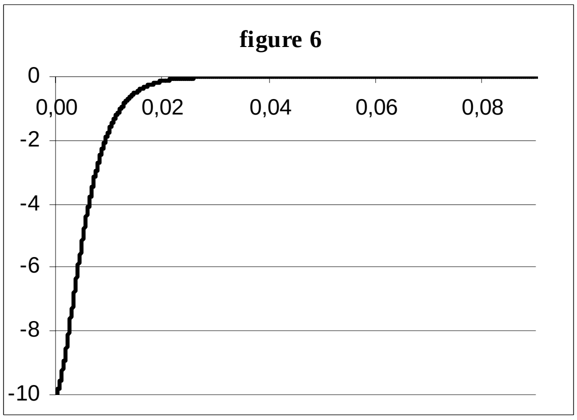
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

Lorsque le facteur de qualité est supérieur à 2, ($\xi < 0{,}25$), cette pseudo-période est proche de celle qui correspond au régime oscillant non amorti, soit :

$$T = 2\pi\sqrt{LC} :$$

- Pour $R = R_c$ (ou $Q = 0{,}5$ ou $\xi = 1$), le régime est dit "**critique**".

La figure 6 nous permet de voir que dans ce cas la tension aux bornes du condensateur ne subit aucun dépassement et qu'elle s'annule très rapidement.



III.3. Solution complète.

Nous nous limiterons au cas où u_E est égal à une constante.

La solution particulière s'obtient, comme pour le premier ordre, en cherchant le régime final (ou régime établi). On additionne à ce résultat la solution de l'équation sans second membre, puis on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.

III.4. Applications pratiques

Deux cas se présentent fréquemment en électricité :

- **Les oscillations sont recherchées**

On réalise alors des circuits de très grands facteurs de qualité. Le problème consiste à minimiser la résistance de la maille. En électronique on utilise parfois des montages "convertisseurs d'impédances négatives" qui permette de l'annuler.

- **Les oscillations doivent être éliminées**.

Les résonances produites peuvent provoquer l'apparition de tensions ou de courants détruisant une partie du circuit. Par exemple un condensateur placé en parallèle d'un dipôle inductif pour améliorer le facteur de puissance peut provoquer une mise en résonance du circuit pour un harmonique du réseau. Il faut alors modifier sa valeur pour décaler la fréquence de résonance.

IV. ANNEXES

IV.1. Solutions des équations différentielles du premier ordre.

IV.1.a. Résolution mathématique

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$\tau \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = A$$

La solution de ce type d'équation est la somme de deux termes : La solution du régime forcé et la solution du régime libre.

Le régime forcé ou régime final, dans ce cas, correspond au moment ou l'on a atteint le régime continu. La grandeur x est alors continue, égale à X_f et sa dérivée est nulle.

La **solution du régime forcé** est donc :

$$X_f = A$$

Le régime libre est régit par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dx_l}{dt} + x_l = 0$$

Pour résoudre cette équation, on commence par séparer les variables x_l et t :

$$\tau \cdot dx_l = -x_l \cdot dt \Rightarrow \frac{dx_l}{x_l} = -\frac{dt}{\tau}$$

On intègre ensuite les deux membres de cette équation :

$$\int \frac{dx_l}{x_l} = -\int \frac{dt}{\tau} = -\frac{1}{\tau}\int dt \Rightarrow \ln x_l = -\frac{t}{\tau} + \text{Cte}$$

Si $A = B$ alors $\exp(A) = \exp(B)$, donc la **solution du régime libre** est :

$$x_l = \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \text{Cte}\right) = K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Pour obtenir la **solution complète** x, on additionne les solutions x_l et X_f :

$$x = K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + A$$

K est une constante d'intégration que l'on détermine avec la **solution complète** et la **condition initiale** c'est à dire la valeur X_{0+} prise par x à l'instant $t = 0+$:

$$X_{0+} = K \cdot \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) + A = K + A \Rightarrow K = X_{0+} - A$$

La **solution générale** est donc :

$$x = (X_{0+} - A) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + A$$

IV.1.b. Résolution numérique

A l'aide d'un tableur on obtient la solution numérique et les courbes très rapidement.

Dans les deux premières colonnes on donne des valeurs aux 4 paramètres nécessaires pour le traitement. La seule contrainte est de choisir "*delta t*" (le pas de calcul) faible devant "*tau*" la constante de temps.

Un exemple est fourni ci-après :

	A	B
2	A	12
3	Tau	0,01
4	X à t=0+	2
5	delta t	0,0005

Les trois colonnes suivantes permettent d'incrémenter le temps et de calculer la valeur de x ainsi que la valeur du point se trouvant sur la tangente à l'origine de la courbe $x(t)$:

- La première ligne est utilisée pour nommer les variables
- La ligne suivante permet d'initialiser les valeurs : on pose t = 0, x = valeur de la case "*X à t =0*" , tg à l'origine = valeur de la case "*X à t =0*"
- La ligne suivante à écrire les équations

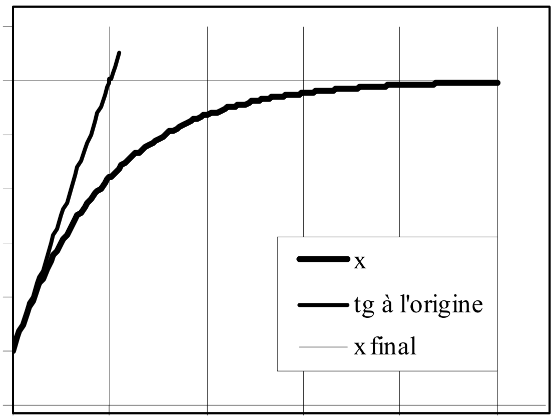
	C	D	E
1	t	x	tg à l'origine
2	0	2	2

Les équations sont :

- Case C3 : =C2 +B$5 soit : $t_{n+1} = t_n + \Delta t$
- Case D3 : =D2+((B$2-D2)/B$3)*B$5, soit $x_{n=1} = x_n + \frac{(A - x_n)}{\tau} \cdot \Delta t$
- Case E3 : =B$4+(B$2-B$4)*C3/B$3, soit $c_n = X_{0+} + \frac{(A - X_{0+})}{\tau} \cdot t_n$

IV.1.c. Allure des courbes :

La courbe obtenue à l'aide des valeurs du § précédent est représentée ci dessous :



Après une durée correspondant à τ, la valeur de x est X_{0+} plus 63 % de la variation à effectuer soit :

$$x(\tau) = X_{0+} + 0{,}63(X_f - X_{0+})$$

Après une durée correspondant à 3τ, la valeur de x est X_{0+} plus 95 % de la variation à effectuer soit :

$$x(3\tau) = X_{0+} + 0{,}95(X_f - X_{0+})$$

Enfin, après une durée correspondant à 5τ, la valeur de x est X_{0+} plus 99,3 % de la variation à effectuer, on peut alors considérer que le régime transitoire est terminé.

IV.1.d. Demi-période

Dans certains domaines scientifiques il est plus habituel, pour les régimes transitoires du premier ordre, de définir à la place de la constante de temps τ une durée T appelée demi-période ($T \approx 0{,}7\ \tau$).

Après une durée T la variable a effectué la moitié de la variation, il en reste donc la moitié. Après deux T il en reste un quart, après 3 T il en reste un huitième etc.. Le régime transitoire peut être considéré comme terminé après 7 $T \approx 5\ \tau$.

Exemples : demi-vie des atomes radioactifs, période d'un tissu pour les calculs de désaturation de l'azote en plongée sous-marine...

IV.2. Solutions des équations différentielles du second ordre.

IV.2.a. Solution du régime libre:

Il est régit par l'équation différentielle suivante :

$$A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$$

On peut montrer que cette équation peut être développée sous la forme :

$$-r_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-r_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\right) + \left(-r_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\right) = 0$$

$$r_1 r_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - (r_1 + r_2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$$

à condition de poser $r_1 \cdot r_2 = A$ et $r_1 + r_2 = -B$

La détermination des valeurs de r_1 de r_2 s'effectue en constatant que ce sont les racines de l'équation du second degré suivante :

$$Ar^2 + Br + 1 = 0$$

Cette équation porte le nom d'*équation caractéristique* de l'équation différentielle.

La solution de l'équation

$$-r_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X + X = 0, \qquad \text{avec} : X = \left(-r_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\right)$$

est de la forme (Cf. § IV-1) :

$$X = K_2 \cdot \exp(r_2 t)$$

Il reste alors à résoudre :

$$X = \left(-r_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\right) = K_2\exp(r_2 t)$$

ayant pour solution (Cf. § IV-1) :

$$x = K_1\exp(r_1 t) + K_2\exp(r_2 t)$$

Pour les régimes transitoires du second ordre rencontrés en électricité il est d'usage d'écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

Les racines r_1 et r_2 sont alors les solutions de l'équation caractéristiques :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$

3 cas se présentent alors :

- $\Delta' > 0 \Rightarrow \xi^2 > 1$

On a alors deux racines réelles négatives (car $\xi > 0$)

$$r_1 = -\xi\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2(\xi^2 - 1)} = -\omega_0\left[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right]$$

$$r_2 = -\xi\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2(\xi^2 - 1)} = -\omega_0\left[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right]$$

d'où

$$x = K_1\exp(r_1 t) + K_2\exp(r_2 t)$$

Les constantes sont déterminées à l'aide des conditions initiales : à $t = 0+$

- $\Delta' = 0 \Rightarrow \xi^2 = 1 \Rightarrow \xi = 1$

Dans ce cas particulier : $r_1 = r_2 = r = -\omega_0$, et la solution est de la forme :

$$x = (K_1 t + K_2)\exp(rt) = (K_1 t + K_2)\exp(-\omega_0 t)$$

- $\Delta' < 0 \Rightarrow \xi^2 < 1$

Les deux racines sont deux nombres complexes conjugués :

$$\underline{r_1} = \omega_0\left(\xi - \mathrm{j}\sqrt{1 - \xi^2}\right)$$

$$\underline{r_2} = \underline{r_1}^* = \omega_0\left(\xi + \mathrm{j}\sqrt{1 - \xi^2}\right)$$

La solution est de la forme :

$$x = K_1\exp(\underline{r_1} \cdot t) + K_2\exp(\underline{r_2} \cdot t)$$

De plus on pose habituellement :

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

d'où :

$$x = \exp(\xi\omega_0 t) \cdot (K_1\exp(-\mathrm{j}\omega \cdot t) + K_2\exp(\mathrm{j}\omega \cdot t))$$

Les constantes K_1 et K_2 sont déterminées à l'aide des conditions initiales.

IV.2.b. Résolution numérique

A l'aide d'un tableur il est très facile de tracer les courbes des tensions et du courant dans un circuit R,L,C série soumis à un régime transitoire.

Considérons par exemple la décharge d'un condensateur C, initialement chargé à la tension E, à travers une bobine d'inductance L et de résistance R.

Les deux premières colonnes sont utilisées pour "déclarer" les valeurs des constantes du circuit.

	A	B
3	R	50
4	L	1
5	C	0,00001
7	E	10
8	delta t	0,0001

On fait calculer la résistance critique et la pseudo-période afin de pouvoir modifier intelligemment *R* et *delta t*.

	A	B
10	Rc	632,45553
11	pseudo T	0,0198692

La première ligne des colonnes suivantes nous sert à nommer les variables, la deuxième à les initialiser.

	C	D	E	F	G
1	t	i	ur	uc	ul
2	0	0	0	-10	10

Ces valeurs correspondent au montage représenté à la figure 3, avec $u_e = 0$ et $u_{C0} = -E$. Avec la convention récepteur que l'on choisit pour tous les dipôles, la tension initiale aux bornes du condensateur est négative : c'est en effet lui qui est « générateur » au début de ce régime transitoire.

Les formules suivantes sont ensuite entrées à la troisième ligne.

- pour *t* : = (case du dessus)+(valeur de delta t) soit : $t_{n+1} = t_n + \Delta t$; *Formule* : =$B$8+C2
- pour *i* : = (case du dessus)+(valeur de ul à la ligne du dessus * delta t * 1/L) soit : $i_{n+1} = i_n + \frac{ul_n}{L} \cdot \Delta t$; *Formule* : =D2+((G2/$B$4)*$B$8)
- pour u_R : R .i ; *Formule* : =$B$3*D3
- pour u_C : (case du dessus)+(valeur de i *delta t * 1/C) soit : $uc_{n+1} = uc_n + \frac{i_{n+1}}{C} \cdot \Delta t$; *Formule :* =F2+(D3*$B$8/$B$5)
- pour u_L : $ul_{n+1} = ur_{n+1} - uc_{n+1}$ *Formule* : =-F3-E3

Pour les lignes suivantes on "recopie vers le bas" les formules de la troisième ligne.

On peut compléter le tableau avec des calculs supplémentaires, comme celui des énergies : énergie électrostatique stockée par le condensateur, énergie magnétique emmagasinée par la bobine, énergie totale et logarithme de l'énergie totale.

H	I	J	K
Ec	El	ET	log ET
5,00E-04	0,00E+00	0,0005	-3,30E+00

Il ne reste plus qu'à tracer les courbes obtenues (Cf. figure 4, 5 et 6), et par exemple les énergies :