CINEMATIQUE DU POINT

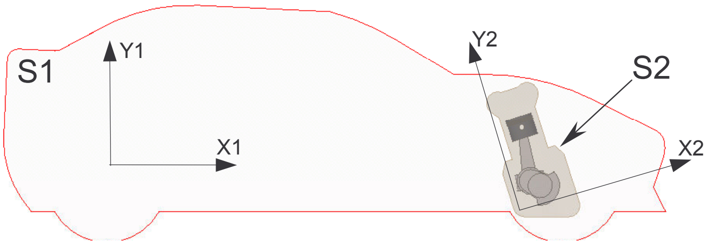
Dominique Dubuis
Lycée Margueritte VERDUN
http://www.bacssimargo.fr

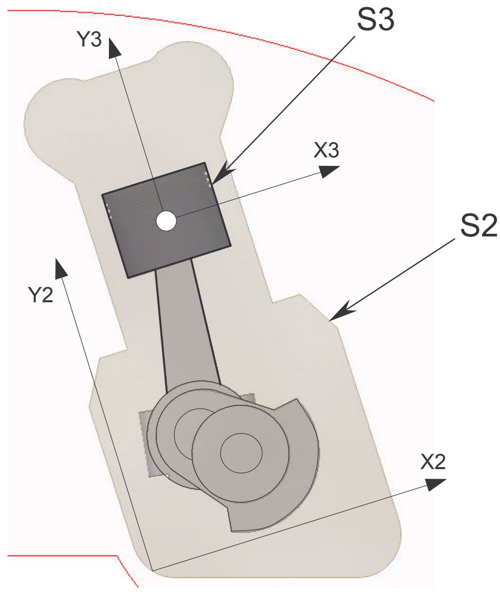
POURQUOI ?

Il est souvent bien pratique, en physique ou en mécanique, d'**étudier le mouvement d'un solide comme si il était concentré en un point** (son centre de gravité en général), affecté d'une masse.
Cette simplification est particulièrement adaptée aux cas où le solide est suffisamment petit par rapport à l'amplitude de ses mouvements. C'est ainsi par exemple que l'on peut calculer avec une grande précision la trajectoire d'un satellite, ou encore analyser les accélérations subies par le pilote d'une voiture de course.
D'où ce chapitre consacré à l'étude du mouvement d'un point

1. REFERENTIEL

On ne peut parler de mouvement (d'un solide ou d'un point) que par rapport à un solide de référence, auquel on associe un repère de référence. Ce solide de référence n'est pas obligatoirement immobile.





Exemples de notations :

Le motoriste s'intéressera au mouvement du piston S3 ***par rapport au bloc moteur S2 :***

Mouvement (S_3/S_2)
= translation rectiligne alternative

L'ingénieur en acoustique s'inquiétera lui des vibrations du bloc moteur S2 ***par rapport à la caisse de la voiture S1 :***

Mouvement (S_2/S_1) = ???

2. TRAJECTOIRE

2.1. DEFINITION : *On appelle trajectoire d'un point M dans son mouvement par rapport à un repère de référence l'ensemble des positions prises par M dans ce repère, au cours du temps.*

Exemple du moteur :

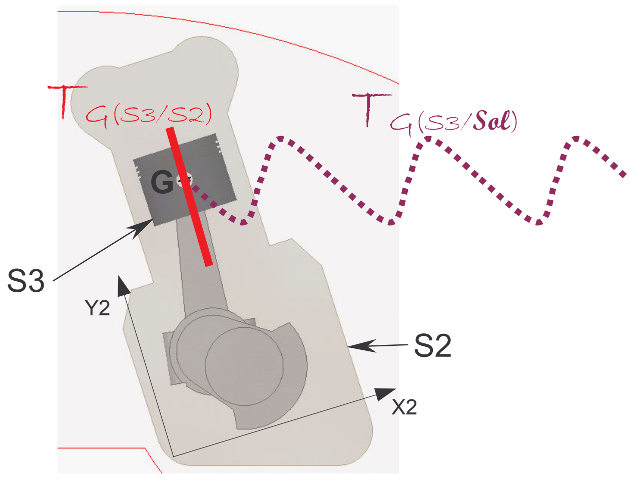
***La trajectoire** du centre de gravité **G** du piston S3 est :*

- ***dans le mouvement de S3 par rapport au carter S2 :***

$T_{G(S3/S2)}$ = ***segment de droite***

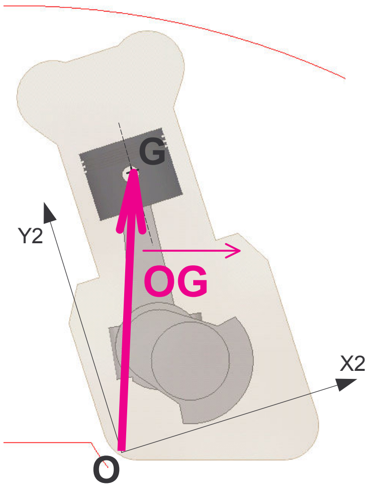
- ***dans le mouvement de S3 par rapport au sol :***

$T_{G(S3/Sol)}$ = ***courbe périodique***



2.2. VECTEUR POSITION

Dans le mouvement d'un point M d'un solide, par rapport à un repère d'origine O, on appelle vecteur position de M à l'instant t le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$



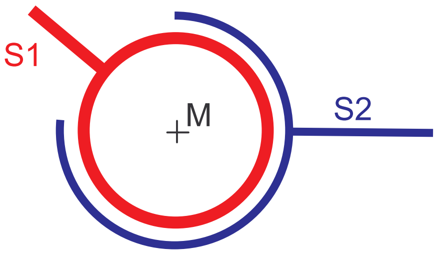
Pour le centre de gravité de notre piston S3 par exemple :
Le repère (X2 , Y2 , Z2) d'origine O est lié au carter S2.
Dans le mouvement S3/S2, le vecteur position est : $\overrightarrow{OG}$

2.3. POINTS COÏNCIDENTS

En un point géométrique M, on peut distinguer des points matériels appartenant chacun à n'importe quel solide. On dit qu'ils sont coïncidents à cet instant.

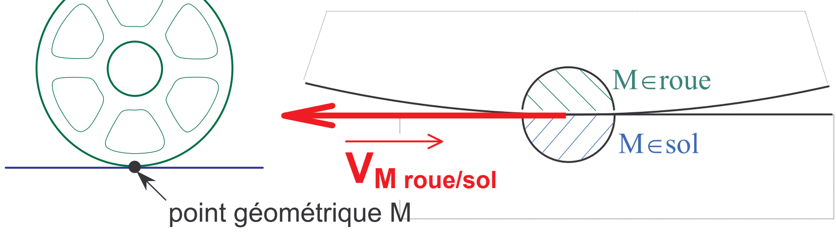
Exemples :

liaison rotule



*Le point matériel **M∈S1** et le point matériel **M∈S2** sont **coïncidents en permanence**, puisque M est immobile dans le mouvement S1/S2 (il est le centre de la rotation)*

Roue sur une surface plane

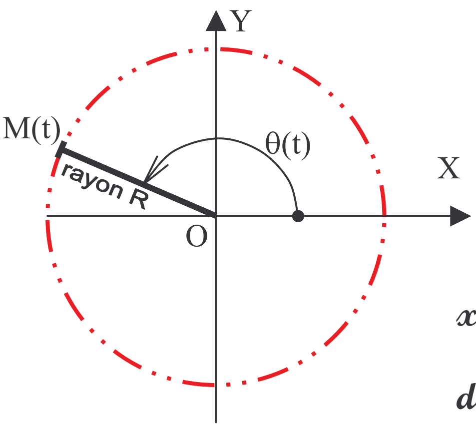


*Le point matériel M∈roue et le point matériel M∈sol sont coïncidents uniquement à l'instant de la figure. De plus, si la roue patine, on appellera **vitesse de glissement** le vecteur :* $\overrightarrow{V_{M(roue/sol)}}$

2.4. EQUATION CARTESIENNE DE LA TRAJECTOIRE

On appelle équation cartésienne de la trajectoire d'un point, l'équation de la courbe représentant la trajectoire, dans le repère de référence, indépendamment du temps.

Exemple :
Soit un point M en mouvement de rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$



Vecteur position à un instant t :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \left| \begin{array}{l} x(t) = R.\cos\theta \\ y(t) = R.\sin\theta \\ z(t) = 0 \end{array} \right|$$

On peut " éliminer " facilement θ qui dépend du temps :

$$x^2 + y^2 = R^2.\cos^2\theta + R^2.\sin^2\theta = R^2.\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}$$

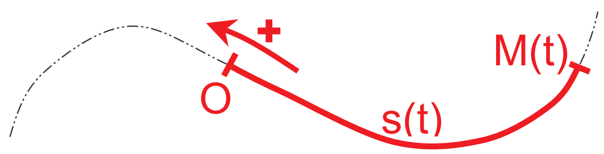
donc : $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ *équation d'un cercle de rayon R de centre O*

3. ABSCISSE Curviligne ou EQUATION HORAIRE

L'idée est de pouvoir situer à chaque instant un point le long de sa trajectoire, en exprimant la distance parcourue en fonction du temps.

Pour cela il faut d'abord choisir sur la trajectoire :

- ***une origine :*** O
- ***un sens positif arbitraire***
- ***une unité de longueur (le mètre)***



Ensuite on exprime : ***l'abscisse curviligne du point*** M ***à l'instant*** t ***:*** s(t) = $\overline{\textit{arc}\ \mathrm{OM}}$

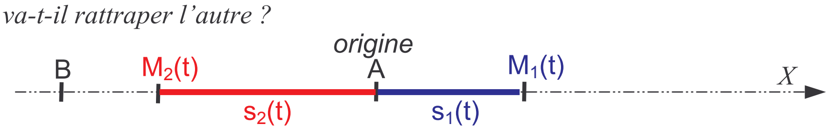
(mesure algébrique de l'arc $\widehat{\mathrm{OM}}$***)***

C'est en quelque sorte la distance parcourue depuis l'origine, affectée d'un signe

Son intérêt est essentiellement limité aux trajectoires rectilignes, ou aux problèmes classiques sur les déplacements de véhicules.

Exemple : *Un train de marchandise passe actuellement en gare A à la vitesse de 30,5 m/s (110 km/h). Il est suivi par un train de voyageurs qui roule à 50 m/s (180 km/h) et qui vient à l'instant de passer la gare B distante de 20 km. Où et quand le train de voyageurs va-t-il rattraper l'autre ?*

Ramenons la trajectoire à un axe rectiligne X, pour simplifier :



abscisse du train de marchandise : $s_1(t) = 30{,}5 \,.\, t$

abscisse du train de voyageurs : $s_2(t) = 50 \,.\, t - 20000$

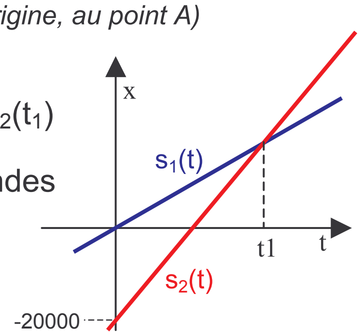
(on prend la même origine, au point A)

L'un rattrapera l'autre lorsqu'ils auront la même abscisse au même instant t_1 *:* $s_1(t_1) = s_2(t_1)$

$30{,}5 \,.\, t_1 = 50 \,.\, t_1 - 20000$ $\qquad t_1 = 20000 / (50-30{,}5) = 1025$ secondes

ce qui fait 17,1 minutes $\qquad$ et la position sera s(1025) = 31282 m

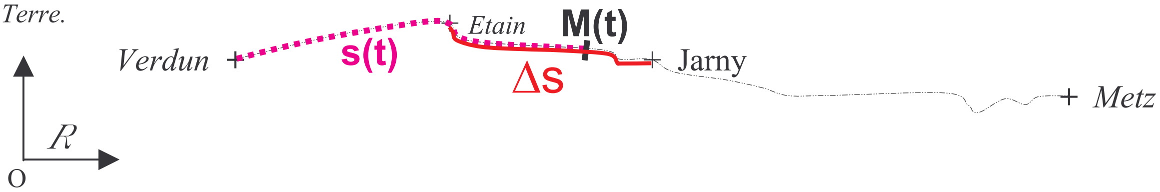
Réponse : Il le rattrapera dans 17 minutes, à un peu plus de 31 km de la gare A



4.VITESSE D'UN POINT

Prenons comme exemple une voiture qui fait le trajet Verdun-Metz.

On considérera cette voiture comme étant un point M se déplaçant sur une trajectoire $T_{M/R}$ *par rapport à un repère lié à la Terre.*



4.1. VITESSE MOYENNE

A l'instant t_1*=15 min , la voiture est à Etain, en* M_1 *d'abscisse* $s(t_1)$ *= 20 km*
A l'instant t_2*=35 min , la voiture est à Jarny, en* M_2 *d'abscisse* $s(t_2)$ *= 42 km*

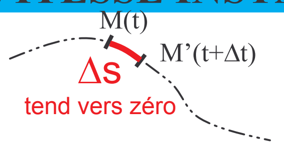
La vitesse moyenne sur Etain-Jarny est de :

$$V_{MOY}(t_1 \text{ à } t_2)_{/R} = \frac{42-20}{35-15} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 1{,}1 \text{ km/min soit } 66 \text{ km/h}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\textit{Vitesse moyenne} = \frac{\textit{distance parcourue}}{\textit{durée}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

4.2. VITESSE INSTANTANEE



Si un " radar " est placé sur le parcours, il mesure une vitesse moyenne sur une dizaine de mètres environ. Une distance suffisamment courte par rapport à l'ensemble du trajet pour que l'on parle de vitesse instantanée.

Mathématiquement, la vitesse instantanée est une vitesse mesurée sur une distance infiniment courte, autrement dit sur une durée Δt qui tend vers zéro :

$$V_{M/\mathcal{R}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

c'est la définition mathématique d'une dérivée

La vitesse instantanée d'un point M dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est la dérivée (par rapport au temps) de son abscisse curviligne s(t).

$$V_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Autrement dit, la vitesse est la dérivée de la position, par rapport au temps.

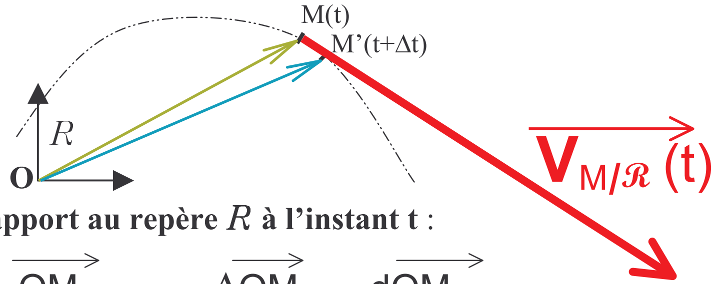
Unité de vitesse pour les calculs de mécanique **: *mètre par seconde* (*m/s*)**

4.3. VECTEUR VITESSE instantané

Le terme $V_{M/\mathcal{R}}(t)$ représente juste un nombre : la vitesse de la voiture lue sur le compteur par exemple. Cette notion est insuffisante en mécanique car il faudrait préciser en plus la direction et le sens de cette vitesse, d'où l'intérêt de représenter la vitesse d'un point par un vecteur :

Pendant l'intervalle de temps Δt :
le point passe de M en M'.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ devient $\overrightarrow{OM'}$



VECTEUR VITESSE DU POINT M par rapport au repère $\mathcal{R}$ à l'instant t :

$$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse instantané d'un point M dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est la dérivée (par rapport au temps) de son vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.

$$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$$

il est toujours tangent à la trajectoire

4.4. COORDONNEES DU VECTEUR VITESSE

En pratique, on écrit d'abord les coordonnées du vecteur position, et on les dérive l'une après l'autre pour avoir celles du vecteur vitesse.

Si le vecteur position a pour coordonnées :
(dans un repère $\mathcal{R}$ fixe !)

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \right|_{\mathcal{R}}$$

$$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}}(t) = \left| \begin{matrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{matrix} \right|$$

se lit « X point » signifie : dérivée de X <u>par rapport au temps</u>

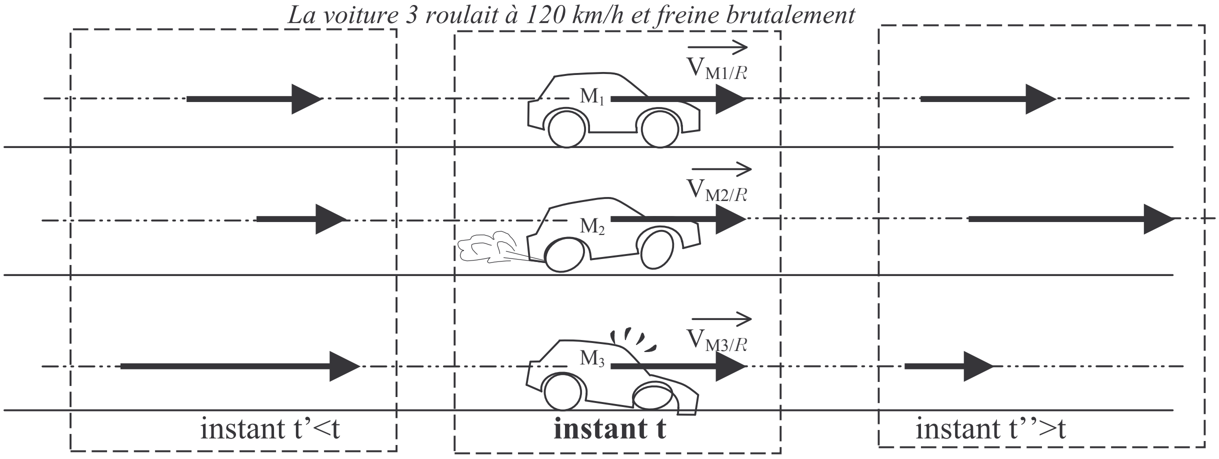
5. NOTION D'ACCELERATION

Nous allons voir que la notion de vitesse ne suffit pas à un mécanicien. Souvent, ce n'est pas la vitesse en elle même qui pose problème, mais la **variation de vitesse.**

PREMIER EXEMPLE : *Imaginons trois voitures, qui roulent en ligne droite :*

A un instant t elles ont toutes les trois le même vecteur vitesse *(même direction, même sens, même norme : 60 km/h)*

Sauf que : *La voiture 1 roule à vitesse constante*
La voiture 2 vient de démarrer, et sa vitesse augmente
La voiture 3 roulait à 120 km/h et freine brutalement



Constatation : à l'instant t les passagers des 3 voitures n'ont pas du tout la même sensation, même si leurs vecteurs vitesse sont identiques.

D'où vient la différence ?

1^er^ cas : la norme de la vitesse est constante

2^ème^ cas : la norme de la vitesse augmente

3^ème^ cas : la norme de la vitesse diminue

Les efforts changent lorsque la norme de la vitesse varie ; Ce phénomène est appelé accélération

DEUXIEME EXEMPLE : *Imaginons deux voitures qui roulent à 60 km/h :*

A un instant t, les deux voitures ont le même vecteur vitesse, et pourtant les passagers n'ont pas les même sensations. Pourquoi ?

Les efforts changent si la direction du vecteur vitesse varie ; Ce phénomène est aussi appelé accélération

CONCLUSION

La variation de position, autrement dit la vitesse, ne suffit pas à expliquer tout ce qui se passe.
Il faut aussi étudier la variation du vecteur vitesse, en norme comme en direction, et pour cela, il faut le dériver, ce qui donnera le vecteur accélération.

6. VECTEUR ACCELERATION D'UN POINT

6.1. DEFINITION

De la même façon qu'on a dérivé le vecteur position pour obtenir la vitesse, nous allons dériver le vecteur vitesse pour avoir l'accélération.

Le vecteur accélération d'un point M dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est la dérivée (par rapport au temps) de son vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}}(t)$.

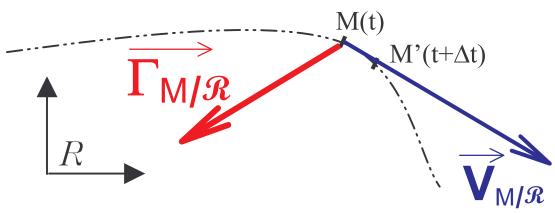
Unité d'accélération : ***mètre par seconde carrée*** $(m/s^2$ ou $m.s^{-2})$

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/\mathcal{R}}}(t) = \frac{d\overrightarrow{V_M}}{dt}$$

Pendant l'intervalle de temps Δt le point étudié passe de M en M'

Son vecteur vitesse est tangent à la trajectoire

Son vecteur accélération est dans une direction (presque...) quelconque : cela dépend à la fois de la variation de la valeur de la vitesse et du type de trajectoire.



6.2. COORDONNEES DU VECTEUR ACCELERATION

Pour obtenir les coordonnées du vecteur accélération, il suffit de dériver les coordonnées du vecteur vitesse (exprimées dans un repère fixe).

Vecteur position: $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$

dérivée

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{V_{M/R}}(t) = \begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathring{x} \\ \mathring{y} \\ \mathring{z} \end{vmatrix}$

dérivée

Vecteur accélération : $\overrightarrow{\Gamma_{M/\mathcal{R}}}(t) = \begin{vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\circ\circ}{x} \\ \overset{\circ\circ}{y} \\ \overset{\circ\circ}{z} \end{vmatrix}$

se lit « X deux points »

7. ACCELERATIONS NORMALE ET TANGENTIELLE

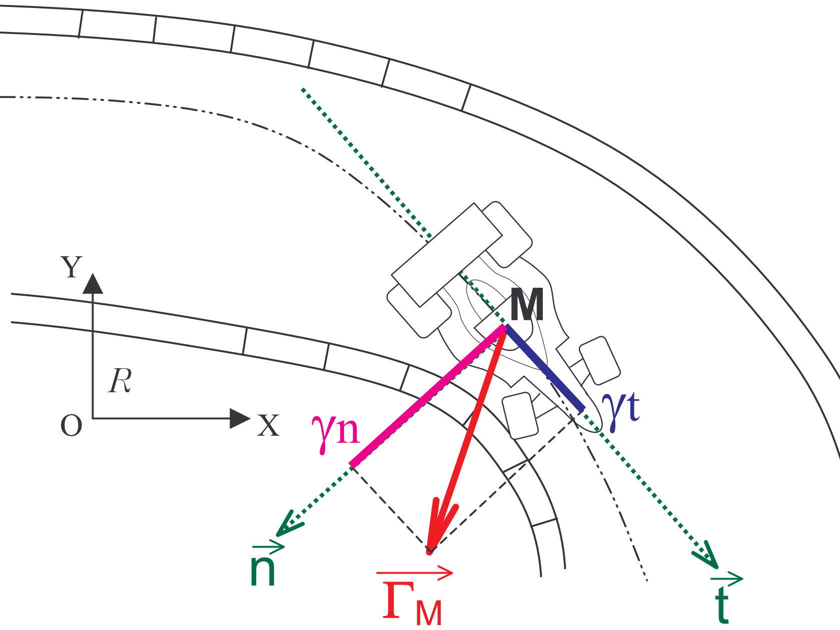
Il peut être intéressant d'exprimer le vecteur accélération dans un repère lié au solide, plutôt que dans un repère fixe quelconque.

Exemple d'une Formule 1 :

En partant du vecteur position exprimé dans un repère fixe (O , $\vec{x}$, $\vec{y}$), on pourrait calculer les coordonnées du vecteur accélération du pilote dans ce même repère.

Mais il serait bien plus intéressant d'avoir une idée de la direction de l'accélération par rapport à la voiture, pour pouvoir distinguer une accélération latérale (effet centrifuge) et une accélération longitudinale (freinage ou reprise de vitesse).

Cela revient à écrire le vecteur accélération dans le repère (M , $\vec{n}$, $\vec{t}$)



Mathématiquement :

Soit le repère R' = {M , $\vec{n}$, $\vec{t}$ } lié au point M tel que :

- $\vec{t}$ *tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement*
- $\vec{n}$ *perpendiculaire à* $\vec{t}$ *, dirigé vers l'intérieur de la trajectoire*

Dans ce repère R' on peut écrire : $\overrightarrow{V_{M/R}}(t) = v \,.\, \vec{t}$ (*car le vecteur vitesse est sur l'axe* t)

Et on peut montrer que le vecteur accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/\mathcal{R}}}(t) = \gamma t \,.\, \vec{t} + \gamma n \,.\, \vec{n}$$

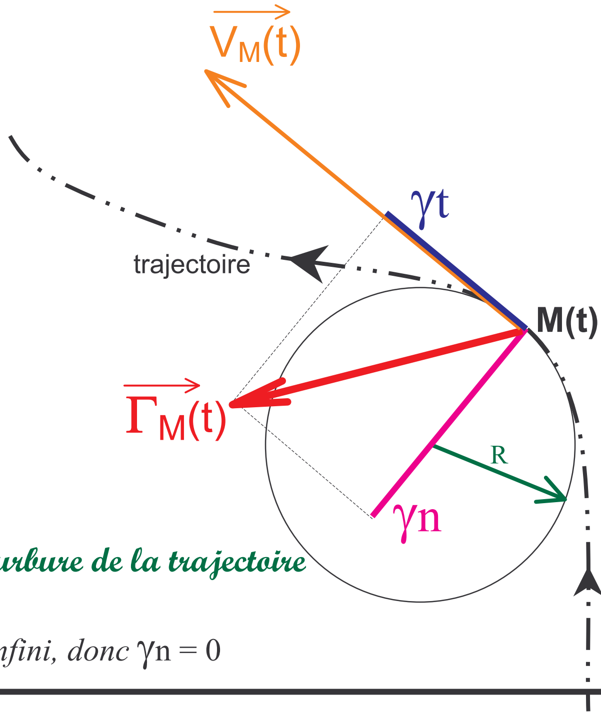
avec : γt = ***accélération tangentielle***

$\gamma t = \dfrac{dv}{dt}$ (*dépend de la variation de vitesse, donc de sa dérivée.*)

γn = ***accélération normale***

= « effet centrifuge »

$\gamma n = R.\omega^2 = V^2/R$ R= *rayon de courbure de la trajectoire*



Remarque : pour une trajectoire rectiligne, R *tend vers l'infini, donc* $\gamma n = 0$